А.И. Архипова, И.В. Дмитриева, В.В. Иус

Электронный образовательный ресурс по информатике на основе программных инструментальных оболочек «Учком» и «Сила знаний» (тема «Системы счисления»)

Аннотация

На предметном содержании информатики показано использование технологий инновационной компьютерной дидактики, созданных с помощью инструментальной оболочки – программы «Сила знаний». Оболочка размещена на сайте http://ya-znau, где и создаются учебные материалы, поэтому она исполняет роль конструктора технологий. Весь теоретический и практический материал размещён в авторской программе-оболочке «УЧКОМ» (учебник + компьютер») и выполнен в программной среде HTML с использованием объектно-ориентированного языка программирования Java Script.

Структура инструментальных оболочек «Учком» и «Сила знаний»

Компьютерная программа «УЧКОМ», полное название «учебник + компьютер», создавалась как электронное приложение к *технологическому* учебнику, особенность которого в том, что в этой модели учебной книги основной объём отводится не изложению учебной теории, а технологиям и приёмам её активного освоения в процессе самостоятельной работы обучающихся. Впоследствии данная программа стала успешно использоваться и для заполнения контентом учебно-методических комплексов по разным научным дисциплинам. В Свидетельстве о регистрации программы в Роспатенте РФ указано, что её основные функции состоят в обеспечении условий для эффективного обучения посредством применения технологий инновационной компьютерной дидактики.

Структура программы представлена на титульном кадре, где размещены интерактивные кнопки, открывающие тексты и практические задания учебной темы. Кнопка с названием темы открывает навигационную карту, с которой возможны переходы

как к теоретическому материалу, так и к упражнениям и обучающим блокам. Кроме того структура включает методический материал, адресованный преподавателю, учителю, студенту или ученику. Есть также Интернет поддержка обучения, обеспечивающая выход на совместные сайты кафедры и редакции.

Специфика структуры программы в том, что она обеспечивает оперативную связь теории с практикой. Это осуществляется специальным структурированием теории, разбиением всего материала на логические порции, для каждой из которых составлено упражнение. Таким образом, изучение нового материала идёт параллельно с его закреплением в практических заданиях. С этой целью в страницы теории вставлены гиперссылки, открывающие навигационную карту, из которой затем запускается программа соответствующего упражнения. Все упражнения выполнены в программной среде HTML. Кнопка «Назад» возвращает читателя к теоретическому разделу.

Принципиально то, что в УЧКОМЕ нет указаний на конкретную возрастную параллель, для которой предназначен конкретный учебный комплекс. Он создаётся на основе содержания разделов и тем научных теорий. Это связано со стремлением приспособиться к перманентным реформам образования, которые длятся уже много десятилетий и, в основном, сводятся к перестановке вопросов теории, не затрагивая самой сути содержания, поскольку в средней школе и общеобразовательной подготовке в вузе в естественнонаучном сегменте образования изучаются классические научные теории, оформившиеся ещё в прошлом веке. Такой подход приводит к частой смене учебников («одногодок»). Выход один – создавать учебные комплексы по конкретным разделам учебного курса. Кроме того комплект «учебник + компьютер» нельзя назвать учебником в традиционном смысле, это даёт возможность избежать процедуры «грифования», дорогостоящей и коррумпированной. В этом одно из преимуществ учебного комплекта, основанного на программе УЧКОМ.

Программа «УЧКОМ» является инструментальной оболочкой, поскольку допускает изменения названий кнопок и их количества, а также модификацию размещённого в ней контента. Кроме того программа, в отличие от существующих электронных приложений к учебникам, позволяет учителям, использующим в практике технологии компьютерного обучения, вносить свои дополнительные модули в виде собственных разработок. Для этого необходимо получить соответствующие «ключи» у разработчиков программы. Достоинство программы в том, что она может импортироваться в различные операционные системы и работать с любым браузером. Комплект УЧКОМ предназначен как для работы с применением планшетных компьютеров, так и стационарных.

Учебный комплекс состоит из параграфа (теория) и сопутствующих практических материалов, представленных в форме интерактивных упражнений и обучающих блоков. Упражнения нацелены только на освоение теоретического материала, многие из них снабжены оперативной проверкой результатов. Обучающие блоки ориентированы на освоение, повторение и углубление теории в целом, они имеют диагностическую компоненту с автоматической проверкой и выставлением оценки. Каждый из блоков нацелен на отработку и закрепление определённых учебных уме-

ний. Например, блок «Словарь знаний» нацелен на закрепление знаний о понятиях изучаемой теории, а «Пробелы в знаниях» и «Поле знаний» на формирование умения решать тренировочные задачи. При этом УЧКОМ – это очень мобильная структура, в которой все элементы легко модифицируются.

Способы обучения педагогов применению и созданию инновационных дидактических технологий описываются на страницах журнала «Школьные годы», на сайте «школьные-годы.рф» можно задать разработчикам комплекта вопросы, а на сайте ya-znau есть возможность конструирования собственных учебных материалов на основе другой инструментальной оболочки «Сила знаний» (Свидетельство Роспатента РФ № 2012610691).

В последнее время в практике компьютерного обучения стали использоваться специальные конструкторы, т.е. программы для создания новых средств обучения пользователями, не владеющими умениями программирования. Такие инструменты существенно могут обогатить методическую «копилку» каждого творчески работающего педагога. Редакцией журнала «Школьные годы» работа по созданию подобных программ проводится уже несколько лет по инициативе доцента Р.И. Золотарёва.

Сначала была создана программа Интернет технологии «Поле знаний», отличающаяся от других тем, что создаётся на сайте журнала http://ya-znau, Для создания как локальной, так и сетевой версий технологии в разделе сайта «Учитель» необходимо выбрать соответствующий программный шаблон и заполнить с помощью клавиатуры необходимые поля. Затем были разработаны программы для других технологий, создаваемых на указанном сайте. Впоследствии они вошли в структуру единой инструментальной оболочки «Сила знаний», созданной в программной среде HTML. Ниже приведён перечень этих технологий, которые мы назвали учебными Интернет технологиями, поскольку они создаются в глобальной сети. При этом каждая из них нацелена на решение конкретной педагогической задачи.

1. Словарь знаний – закрепление знаний о терминах, правилах, определениях. Программа сообщает итоговый результат.
2. Кроссворд знаний – по своим дидактическим функциям дополняет «Словарь знаний», но предусматривает оперативную проверку и возможность самостоятельного создания технологии учащимися по содержанию изученной темы.
3. Конструктор знаний – освоение знаковых систем (формул, символов), приёмы «Собрать формулу», «Опорный конспект» (используется программа Drag and drop).
4. Поле знаний – приём «учебная альтернатива» (ответ «Да» или «Нет»), выбор из двух альтернативных положений теории при факторизации её содержания.
5. Лабиринт знаний – используется ситуация выбора траектории движения при решении конкретной учебной задачи, например, выбрать по определенному признаку элементы изученной темы.
6. Формула знаний – осмысление основных положений изучаемой темы посредством их составления из отдельных элементов с использованием специальных знаков (логических формул) и логических связок. Допускается возможность проверки составленного правила (истинно или ложно).
7. Матрица знаний – интеграция в едином пространстве (игровом поле) основных теоретических положений изучаемой темы посредством выделения в теме 8 частей и 4-х групп.
8. Пробелы в знаниях – первичная проработка практического материала, сопутствующего изучаемой теме на первом уровне сложности, отработка алгоритмов решения тренировочных задач.
9. Фасетный тест знаний – освоение приёмов решения задач по содержанию изучаемой темы в соответствии с принципом «от простого к сложному», предусмотрена оперативная проверка результата, возможность повторного решения. Предусмотрены три группы сложности заданий.
10. Контрольный тест знаний – нацелен на итоговую проверку умений решать задачи по содержанию изучаемой темы, включает задания трёх категорий сложности.

Технологии 1 – 7 ориентированы на самостоятельное освоение теоретического материала, а 8 – 10 предназначены для её закрепления в практических заданиях. Все перечисленные технологии образуют комплект обучающих блоков, объединённых общим названием «Сила знаний». При этом в компьютерные учебно-методические комплексы может включаться не весь перечень технологий, в этом случае титульный кадр программы изменяется.

В журнале «Школьные годы» № 45 приводятся подробные описания каждой из технологий комплекта, а также алгоритмы их создания. Кроме того учителя могут получать консультации разработчиков в процессе создания собственного контента на основе программных шаблонов инструментальной оболочки «Сила знаний». В редакцию уже поступают сообщения о подобной работе некоторых учителей-новаторов.

Системы счисления (теория)

1. Позиционные и непозиционные системы счисления

Система счисления (СС) – это способ представления чисел и правила действий над числами. Все системы счисления (их иногда называют нумерацией) делятся на *позиционные* и *непозиционные*. Символы (знаки), используемые для записи чисел, называют *цифрами*. В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от её положения (места) в записи числа. В непозиционных системах счисления количественное значение цифры не зависит от её положения (места) в записи числа.

В непозиционных системах счисления каждый знак в записи числа имеет всегда одно и то же значение, независимо от его расположения в этой записи. К таким системам относится *римская система счисления*. Например, число **I** в римской системе означает один, число **II** означает 1 + 1, т. е. два, а число **III** означает 1 + 1 + 1 = 3. В ней в качестве цифр используются латинские буквы.

Таблица 1. Римская система счисления

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	**5**	**10**	**50**	**100**	**500**	**1000**

В позиционных системах счисления величина, обозначаемая цифрой, зависит от её позиции. В современной математике используется позиционная десятичная система. Например, в числе 111 первая единица означает одну сотню, вторая – один десяток и третья – единицу.

Совокупность *различных* символов (их называют базовыми), используемых для записи чисел, образует *алфавит* системы счисления. I, V, X, L, C, D. M — это *алфавит* римской системы счисления (показан в таблице 1).

2. Перевод из римской системы счисления в десятичную

Правило перевода из римской системы счисления в десятичную: если цифры записаны слева направо в порядке убывания, то их значения складываются, если слева записана меньшая цифра, а справа большая, то из правой вычитается левая.

CLV = 100 + 50 + 5 = 155.

IL = 50 – 1 = 49

DCVLI = 500 + 100 + (–5 + 50) + 1 = 646.

Выполните упражнение № 1. На web странице запишите числа в окна ввода ответов. Нажмите на кнопку «Проверить».

1. Какие числа записаны с помощью римских цифр?

CIX MMCX XCIV LDDCII

2. Запишите дату начала олимпиады в Сочи (год, месяц и число) с помощью римских цифр.
3. Просмотрите презентацию «Системы счисления» .html5. Какое число записано римскими цифрами MM?
4. Просмотрите презентацию «Системы счисления» .html5. Какое число является основанием в вавилонской системе счисления?
5. Какое число означает символ ∩ в системе счисления Древнего Египта?
6. Какое это число в славянской нумерации?

3. Десятичная система счисления

Самая распространённая в мире и используемая в математике, *десятичная система счисления,* является позиционной, состоящей из 10 разных знаков – цифр:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Здесь значение цифры *зависит* от ее положения в записи числа. Например, если цифра 1 стоит в записи числа на первом месте справа, то она означает *один*, если на втором месте справа, то *десять*, на третьем месте справа — *сто* и т. д. Так, в числе **777** цифра семь имеет разный «вес» (рисунок 1).

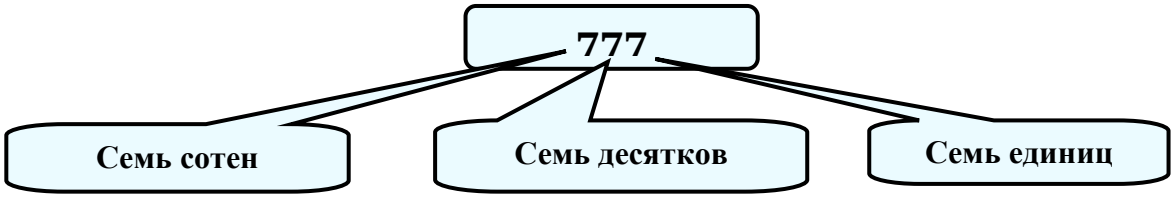

Рисунок 1

Число различных символов, составляющих алфавит позиционной системы счисления, называется её *основанием. Алфавит* десятичной системы – это цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а основание равно 10.

В качестве основания системы счисления можно взять любое натуральное число, например 3 или 5. Алфавитом троичной системы счисления будут цифры 0, 1, 2, а пятеричной 0, 1, 2, 3, 4.

В компьютере для хранения информации используются технические устройства с двумя устойчивыми состояниями (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен). Для записи этой информации используют нуль и единицу (0 — нет сигнала; 1 — есть сигнал), поэтому числа в компьютере представляют в двоичной системе счисления. Двоичная система счисления — это позиционная система счисления, состоящая только из двух цифр: **0** и **1**.

4. Двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная системы счисления

В ЭВМ, кроме двоичной, используются позиционные системы *восьмеричная и шестнадцатеричная*. Для десятичной системы счисления основание – это число **10**, для двоичной – число **2**, для восьмеричной – число **8**, для шестнадцатеричной – число **16**. Основание системы счисления принято записывать нижним индексом в записи числа, например, $\mathbf{101101_2}$, $\mathbf{3671_8}$.

В таблице 2 представлены последовательности натуральных чисел в различных системах счисления, полученные с помощью *Правила счета*.

Таблица 2

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
0	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**
2	**10**	**2**	**2**
3	**11**	**3**	**3**
4	**100**	**4**	**4**
5	**101**	**5**	**5**
6	**110**	**6**	**6**
7	**111**	**7**	**7**
8	**1000**	**10**	**8**
9	**1001**	**11**	**9**
10	**1010**	**12**	**A**
11	**1011**	**13**	**B**
12	**1100**	**14**	**C**
13	**1101**	**15**	**D**
14	**1110**	**16**	**E**
15	**1111**	**17**	**F**
16	**10000**	**18**	**10**

Правило счёта

Для образования целого числа, следующего за любым данным целым числом, нужно прибавить 1 к предыдущему числу. Если же это число является *наибольшим* числом алфавита, то в соответствующий разряд суммы записывают 0, а 1 переносится в следующий старший разряд.

Алфавиты различных систем счисления представлены в таблице 3.

Примеры. 1). Десятичная СС: 9 + 1 = 10 (в разряд единиц записываем «0», а в разряд десятков ставим «1»; далее к числам прибавляются «1» до числа 19); 19 + 1 = 20 (в разряд единиц записываем «0», а к разряду десятков добавляем «1»); 99 + 1 = 100 (в разрядах единиц и десятков стоит наибольшее число из алфавита, поэтому записываем в этих разрядах

Таблиа 3

Основание	Название	Алфавит	Наибольшее число
n = 2	Двоичная	0 1	1
n = 8	Восьмеричная	0 1 2 3 4 5 6 7	7
n = 10	Десятичная	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	9
n = 16	Шестнадцатеричная	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	15

«00», а в разряд сотен ставим «1»). Таким же способом получаются числа в других системах счисления.

2) Двоичная СС: $1 + 1 = 10_2$ (это число 2_{10}); $10_2+1 = 11_2$ (это число 3_{10}); $11_2+1 =$

100_2 (это число 4_{10}); $111_2+1 = 1000_2$ (это число 8_{10}); $1111_2+1 = 10000_2$ (это число 16_{10}).

3) Восьмеричная СС: (используется для представления информации в компьютерных системах, основанных на восьмиразрядных микропроцессорах): $7_8+ 1 = 10_8$; $17_8+ 1 = 20_8$; $77_8+ 1=100_8$.

4) Шестнадцатеричная система счисления имеет 16 независимых символов алфавита. Десять из этих символов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0 (нуль) такие же, как и в десятичной системе. К ним добавлены еще 6 символов: A, B, C, D, E, F. Символ A соответствует десятичному числу десять, B – числу 11, C – числу 12, D – числу 13, E – числу 14, F – числу 15. Приведём примеры последовательных чисел в шестнадцатеричной системе счисления: $9_{16} + 1 = A_{16}$; $F_{16} + 1 = 10_{16}$; $AFFF_{16} + 1 = B000_{16}$.

Шестнадцатеричная система имеет менее длинную форму записи больших чисел, чем десятичная, и используется для представления двоичной информации, хранящейся в памяти компьютера, в более коротком виде. Здесь важно то, что число 16 – это целая степень числа «2», так как $2^4 = 16$.

5. Развернутая форма записи чисел

Сущность позиционного представления чисел отражается в *развернутой форме записи чисел.* Объясним это на примере десятичной системы. Например:

$$3617{,}42 = 3000 + 600 + 10 + 7 + 0{,}4 + 0{,}02 =$$
$$= 3\times10^3 + 6\times10^2 + 1\times10^1 + 7 + 4\times10^{-1} + 2\times10^{-2}.$$

Последнее выражение и называется *развернутой формой записи числа.* Слагаемые в этом выражении являются произведениями значащих цифр числа на степени десятки (основания системы счисления), зависящие от позиции цифры в числе — разряда. Цифры в целой части умножаются на положительные степени 10, а цифры в дробной части — на отрицательные степени. Показатель степени является номером соответствующего разряда. Аналогично можно получить развернутую форму чисел в других системах счисления. Например, для восьмеричного числа:

$$2743_8 = 2\times10^3 + 7\times10^2 + 4\times10^1 + 3.$$

Здесь $10_8 = 8_{10}$.

6. Перевод из недесятичной системы счисления в десятичную систему счисления

Для перевода числа из недесятичной системы счисления в десятичную нужно перейти к записи развернутой формы числа в десятичной системе и вычислить полученное выражение по правилам десятичной арифметики. Вот пример такого вычисления для приведенного выше восьмеричного числа:

$$2743_8 = (2\times10^3 + 7\times10^2 + 4\times10^1 + 3)_8 = (2\times8^3 +7\times8^2 + 4\times8^1+ 3)_{10} =$$
$$= (1024 + 448 + 32 + 3)_{10} = 1507_{10}.$$

Чаще всего развернутую форму числа сразу записывают в десятичной системе. Вот пример перевода двоичного числа в десятичную систему:

$10101{,}1_2 = (1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1 + 1\times2^{-1})_{10} = 16 + 4 + 1 + 0{,}5 = 21{,}5_{10}$

Пример перевода шестнадцатеричного числа в десятичную систему:

$27BC_{16} = 2\times16^3 + 7\times16^2 + 11\times16^1 + 12 = 8192 + 1792 + 176 + 12 = 10172_{10}$.

При переводе чисел в десятичную систему счисления удобно использовать следующий прием: подписывать над числами значения показателя степени основания системы счисления, например:

для числа с основанием **2**: $\overset{6\,5\,4\,3\,2\,1\,0}{1111101_2} = 1\cdot2^6 + 1\cdot2^5 + 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0$ $=63+32+16+8+4+0+1= 125_{10}$;

для числа с основанием **8**: $\overset{2\,1\,0}{175_8} = 1\cdot8^2 + 7\cdot8^1 + 5\cdot8^\circ = 64 + 56 + 5=125_{10}$;

для числа с основанием **16**: $\overset{1\quad0}{7D_{16}} = 7\cdot16 + 13\cdot16^0 = 112 + 13 = 125_{10}$.

для дробной части: $0,\overset{-1\,-2\,-3}{0\,0\,1} = 0\cdot2^{-1}+0\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3}=\frac{1}{8}=0{,}125$.

Выполните упражнение № 2. Натуральный ряд чисел в различных позиционных системах счисления. Найдите соответствие заданий и ответов к ним.

Пример

Натуральный ряд двоичных чисел от 100 до 10000:

100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000.

Задание 1

1.1. Напишите натуральный ряд первых десяти чисел в троичной системе счисления.

1.2. Запишите натуральный ряд восьмеричных чисел от 55 до 100.

1.3. Запишите натуральный ряд шестнадцатеричных чисел от A5 до B5.

Задание 2

2.1. Запишите в развернутом виде числа:

43521_{10} 43521_8 43521_{16}

2.2. Запишите в развернутом виде числа:

$435{,}21_{10}$ $435{,}21_8$ $435{,}21_{16}$

2.3. Выполните перевод следующих чисел в десятичную системы счисления:

125_8 521_8 521_{16}

$125{,}34_8$ $521{,}48_8$ $521{,}48_{16}$

7. Перевод десятичных чисел в другие системы счисления

Способ 1-й. Любое число однозначно переводится из одной системы счисления в другую. Рассмотрим пример перевода десятичного числа 125 в двоичное число. Для этого нужно делить в «столбик» число 125 на 2 до тех пор, пока частное не ока-

жется меньше делителя. При этом удобно записывать частные справа, а остатки слева (рисунок 2). Искомое число – это последовательность остатков деления. Остатки записываются от последнего к первому (указано стрелкой на рисунке 2). В данном случае результат: $125_{10} = 1111101_2$.

Способ 2-й. Состоит из следующих шагов**.**

1. Число в новой системе счисления (искомое число) в общем виде будет иметь вид: $\mathbf{a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0}$. В этой записи **а** – это остатки при делении исходного числа на основание системы счисления.

2. Исходное число последовательно делят на основание новой системы счисления до тех пор, пока остаток не станет меньше делителя. Деление записывают в столбик (рисунок 3).

3. Остатки деления обозначают буквами **а**, начиная с первого. Ему приписывают индекс 0 и записывают в конце полученного числа. Искомое число записывают в новой системе счисления, начиная с последнего частного. Рассмотрите примеры перевода чисел в другие системы счисления (рисунки 4 и 5).

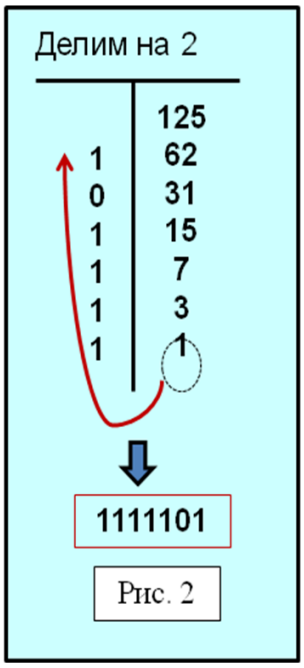

Рис. 2

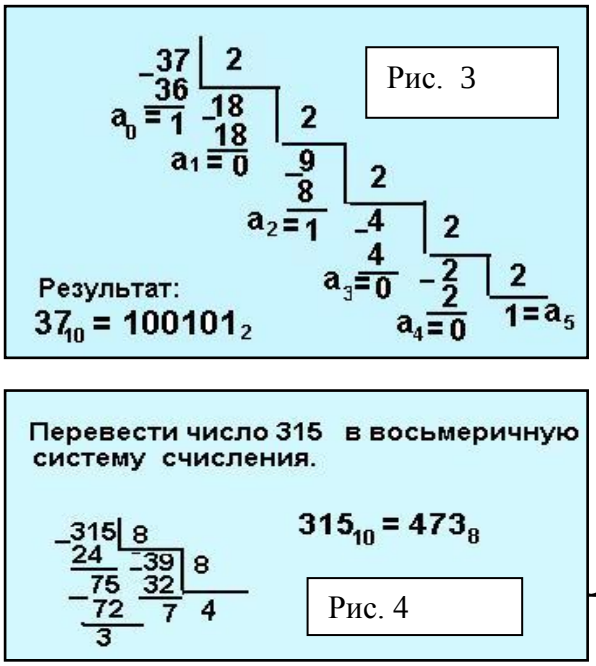

Рис. 3

Рис. 4

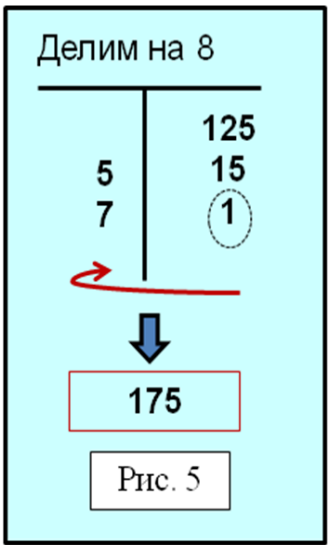

Рис. 5

7. Переводы в системах счисления, используемых в ЭВМ

Рассмотрим вначале перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную. Для этого двоичное число нужно разбить на **триады** слева и справа от запятой для перевода в восьмеричную систему счисления ($8 = 2^3$) и на **тетрады** для перевода в шестнадцатеричную ($16 = 2^4$). Если в последней левой (в целой части!) окажется меньше цифр, то дополнить число незначащими нулями. Если в последней правой (в дробной части!) окажется меньше цифр, то дополнить число незначащими нулями. Записать эти части соответствующей цифрой из таблицы 2. Например, для перевода числа $11110011000110{,}0111_2$ в восьмеричную систему, его нужно разбить на триады:

11 110 011 000 110 , 011 1

Дополнить триады слева и справа нулями

3 6 3 0 6 3 4

0 11 110 011 000 110 , 011 1 00

Записать каждую триаду соответствующей восьмеричной цифрой, получаем:

$11110011000110{,}0111_2 = 36306{,}34$

Перевод восьмеричных и шестнадцатеричных чисел в двоичную систему выполняется так: каждую цифру заменяют эквивалентной ей **триадой** (метод триад для восьмеричной системы) и **тетрадой** (метод тетрад для шестнадцатеричной системы). Примеры:

$625{,}12_8 =$ 110 010 101 , 001 010; $3C7{,}E_{16} =$ 0011 1100 0111 , 1110.

6 2 5 1 2 3 C 7 E

Совет.

Если десятичное число достаточно большое, то лучше перевести его сначала в восьмеричное, а затем в двоичное, а потом в шестнадцатеричное. Переведем число 125 в восьмеричное число (рис.5). Получим $125_{10} = 175_8$. Полученное восьмеричное число легко преобразовать в двоичное. Применяем для этого ***правило триад*** – каждую восьмеричную цифру заменяем трёхразрядным двоичным числом, пользуясь табл. 4.1. В данном случае **5** заменяем на **101**, **7** – на **111**, **1** – на **001**. Получим: $125_{10} = 175_8$. = 001 111 101_2= 1111101_2

Затем преобразуем это двоичное число в шестнадцатеричное. Для этого условно разобьем его на части по 4 символа, начиная с крайней правой цифры. Затем каждой четверке сопоставим соответствующую шестнадцатеричную цифру. Такое преобразование правомерно, т.к. $16 = 2^4$. Это правило называется ***правилом тетрад***: $1111101_2 = 0111\ 1101_2 = 7D_{16}$

Выполните упражнение № 3. Тест 1 «Переводы в системах счисления»

1. Перевести целые числа из десятичной системы счисления в двоичную:

   658 254 34 17

2. Перевести целые числа из десятичной системы счисления в восьмеричную:

   15 452 255 76

3. Перевести целые числа из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную:

   456 234 165 65

4. Перевести целые числа из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную:

   1111000101 1101111001110 10111000101011

5.Перевести целые числа из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную и восьмеричную: A15 2D7 F16

8. Перевод дробных чисел

Целая и дробная части смешанных десятичных чисел переводятся по отдельности. Перевод целой части осуществляется по рассмотренным выше правилам, а перевод дробной части по следующему алгоритму.

1. Дробная часть числа умножается на основание системы, в которую переводится искомое число (на рисунке 6 дан пример перевода числа 0,125).

2. Целая часть полученного числа записывается отдельно (можно через черту, как на рисунке 6). Полученная дробная часть снова умножается на основание.

3. Процедура продолжается, пока дробная часть не станет равной нулю.

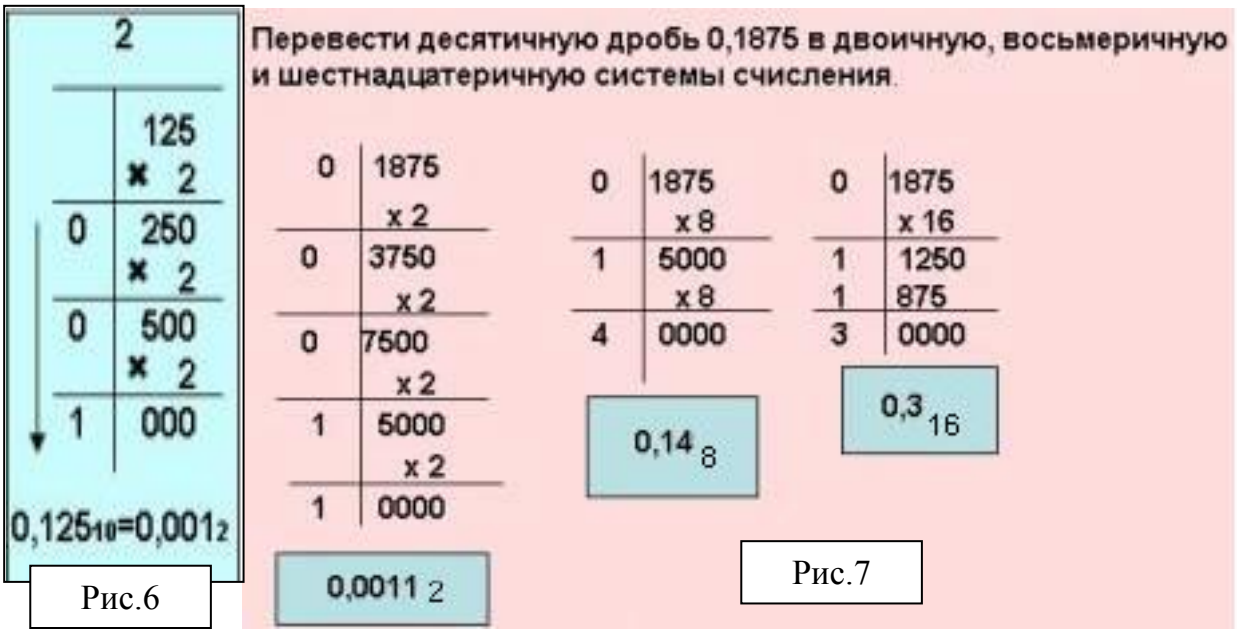

Рис.6 Рис.7

4. Целые части выписываются после запятой в порядке их получения (для нашего примера получили $0,125_{10}= 0,001_2$).

5. Если дробная часть не «обнуляется», необходимо прекратить умножение и проверить полученное число переводом в десятичную СС по правилу перевода дробных чисел. Чем ближе полученное число к исходному, тем выше точность перевода. Если нужная точность не достигнута, то нужно продолжить умножение. Аналогично осуществляется перевод десятичных дробей в восьмеричную и шестнадцатеричную системы. Примеры рассмотрены на рисунке 7.

*Выполните упражнение № 4.*Тест 2 «Переводы в системах счисления»

1. Переведите десятичные числа в двоичную систему счисления:0,25 и 0,625

2. Переведите десятичные числа в восьмеричную и шестнадцатеричную систему счисления:

$0{,}5 \rightarrow A_8$ $0{,}375 \rightarrow A_{16}$

3. Переведите смешанные десятичные числа в восьмеричную и шестнадцатеричную систему счисления: $23{,}5 \rightarrow A_8$ $128{,}625 \rightarrow A_{16}$

4. Расположите следующие числа в порядке возрастания:

а) 74_8, 110010_2, 40_{10}, 38_{16}; б) $6E_{16}$, 357_8, 1101001_2, 101_{10};

1. Арифметические операции в позиционных системах счисления

Рассмотрим основные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Правила выполнения этих операций в десятичной системе хорошо известны — это сложение, вычитание, умножение столбиком и деление углом. Эти правила можно применять и ко всем другим позиционным системам счисления. В основе правил арифметики лежат таблицы сложения и умножения в соответствующей системе счисления.

5.1 Сложение

Составим таблицы сложения для двоичной и восьмеричной систем счисления, используя **Правило счета**:

Сложение в двоичной системе

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Сложение в восьмеричной системе

0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

При сложении цифры суммируются по разрядам, а если возникает избыток, то он переносится влево. Рассмотрим подробнее сложение в двоичной системе:

1. Двоичные числа записываются "в столбик" так, чтобы цифры в одинаковых разрядах располагались друг под другом, начиная с разряда единиц; целая и дробная части записываются друг под другом соответственно.

2. Складываются цифры, начиная с младшего разряда (справа налево). При этом пользуются следующими правилами: 0+0=0, 0+1=1, 1+1=10. В последнем случае в разряде сложения остается 0, а 1 переходит в старший разряд и суммируется с другими цифрами.

Пример 1. Сложить двоичные числа 1101 и 1111.

1. Записываем числа друг под другом, разряд под разрядом, начиная с младшего
2. Складываем цифры одного разряда по приведенным выше правилам (рис.8).

3. Получим результат: $1101_2 + 1111_2 = 11100_2$.

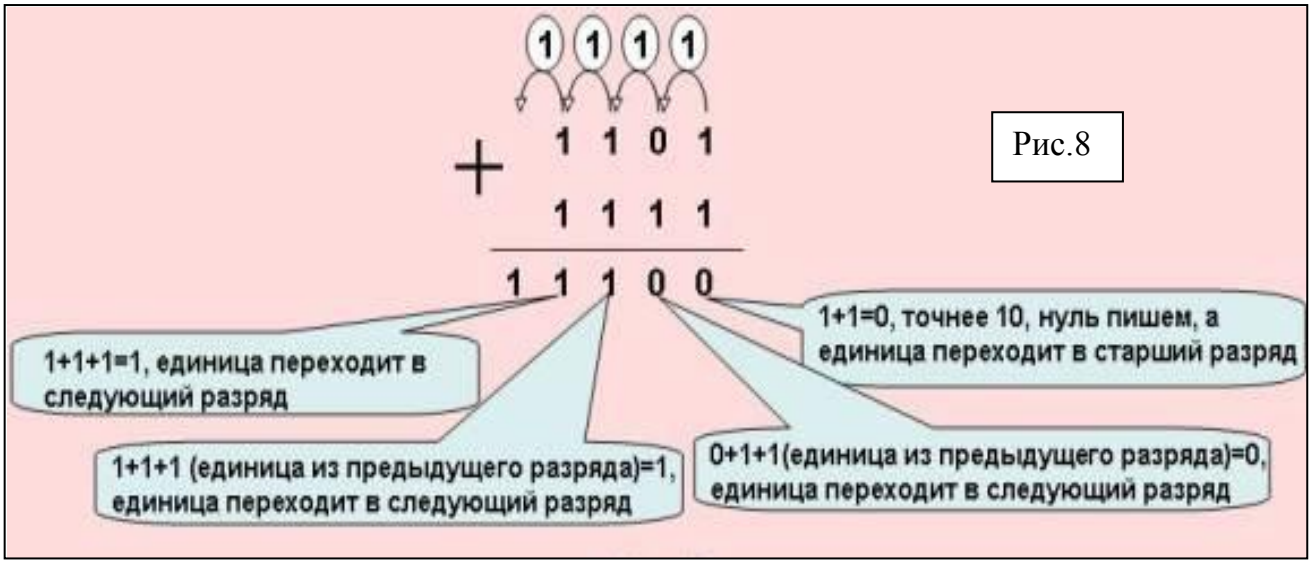

Рис.8

Пример 2. Сложить те же числа в восьмеричной системе $1101_2 = 15_8$ и $1111_2 = 17_8$.

1. Записываем числа друг под другом, разряд под разрядом, начиная с младшего.

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 17 \\ \hline 34 \end{array}$$

2. Складываем цифры одного разряда по таблице сложения восьмеричных чисел. В младшем разряде $5_8 + 7_8 = 14_8$, 4 записываем, а 1 переносим в старший разряд. В старшем разряде $1_8 + 1_8 + 1_8$ (из предыдущего разряда)$= 3_8$.

3. Получим результат: $15_8 + 17_8 = 34_8$.

Проверка правильности вычислений

Для проверки правильности вычислений можно так же поступить следующим образом:

1. Перевести исходные числа из двоичной (или другой) системы в десятичную.
2. Выполнить сложение в десятичной СС.
3. Перевести результат в двоичную (исходную) СС.

Решение

Переведем заданные числа в десятичную СС.

$\overset{3\,2\,1\,0}{1101_2} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{10}$;

$\overset{3\,2\,1\,0}{1111_2} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15_{10}$.

Складываем: 13 + 15 = 28.

Переводим 28 из десятичной СС в двоичную СС делением на два (рисунок 9). Получим: $28_{10} = 11100_2$.

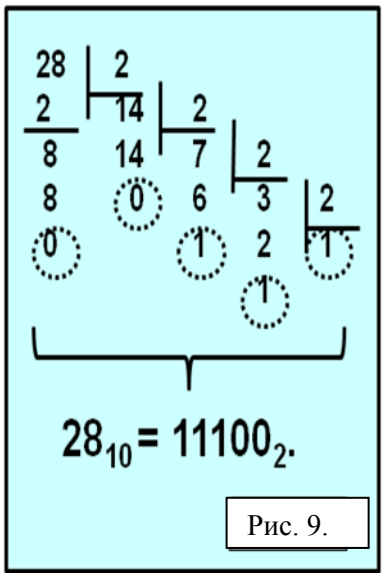

Рис. 9.

Выполните упражнение № 5. Выберите из таблицы «Ответы» соответствующие числа и запишите их буквенные обозначения в окна ввода ответов. Таблицу сложения составьте в поле интерактивного кроссворда.

1. Сложите числа, а затем проверьте результаты, выполнив соответствующие десятичные сложения:

а) 1010101_2 и 101101_2; в) 34_8 и 65_8; д) B_{16} и E_{16};

б) $1010{,}111_2$ и $100{,}101_2$; г) 175_8 и 64_8; е) 221_{16} и $1D_{16}$;

2. Выполните сложение и проверку результата для следующих чисел:

22_3 и 101_3; 12_3 и 220_3.

3. Используя *Правило счета*, составьте таблицу сложения для троичной системы счисления.

5.2 Вычитание

Вычитание чисел в позиционной системе счисления выполняется так же, как в десятичной. При этом нужно помнить, что вычитание – действие, обратное сложению. Для двоичной системы счисления вычитание выполняется таким образом.

1. Двоичные числа записываются "в столбик", причем, меньшее из чисел должно находиться под большим числом.

2. Цифры вычитаются, начиная с младшего разряда (справа налево). При этом пользуются следующими правилами: 0 – 0 = 0, 1 – 0 = 1, 1 – 1 = 0, 10 – 1 = 1. В последнем случае из нуля мы вычесть не можем, поэтому занимаем десяток из следующего, более старшего, разряда. Получаем 10 – 1 = 1, а следующий (старший) разряд становится на единицу меньше.

Рассмотрим пример. Найти разность двоичных чисел 101 и 1010.

1. Записываем числа друг под другом, сверху большее из чисел, т.е. 1010, снизу меньшее, т.е. 101 (рисунок 10).

2. Вычитаем цифры одного разряда по приведенным выше правилам.

3. Получим результат: $1000_2 - 111_2 = 1_2$.

Проверка выполняется аналогично двоичному сложению в следующем порядке.

1. Перевести исходные числа из двоичной системы в десятичную.

2. Выполнить вычитание в десятичной СС.

3. Перевести результат в двоичную СС.

Решение

1. Переводим двоичные числа в десятичную СС:

$$\overset{2\,1\,0}{111_2} = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7_{10},$$

$\overset{3\,2\,1\,0}{1000_2} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 8 + 0 + 0 + 0 = 8_{10}$.

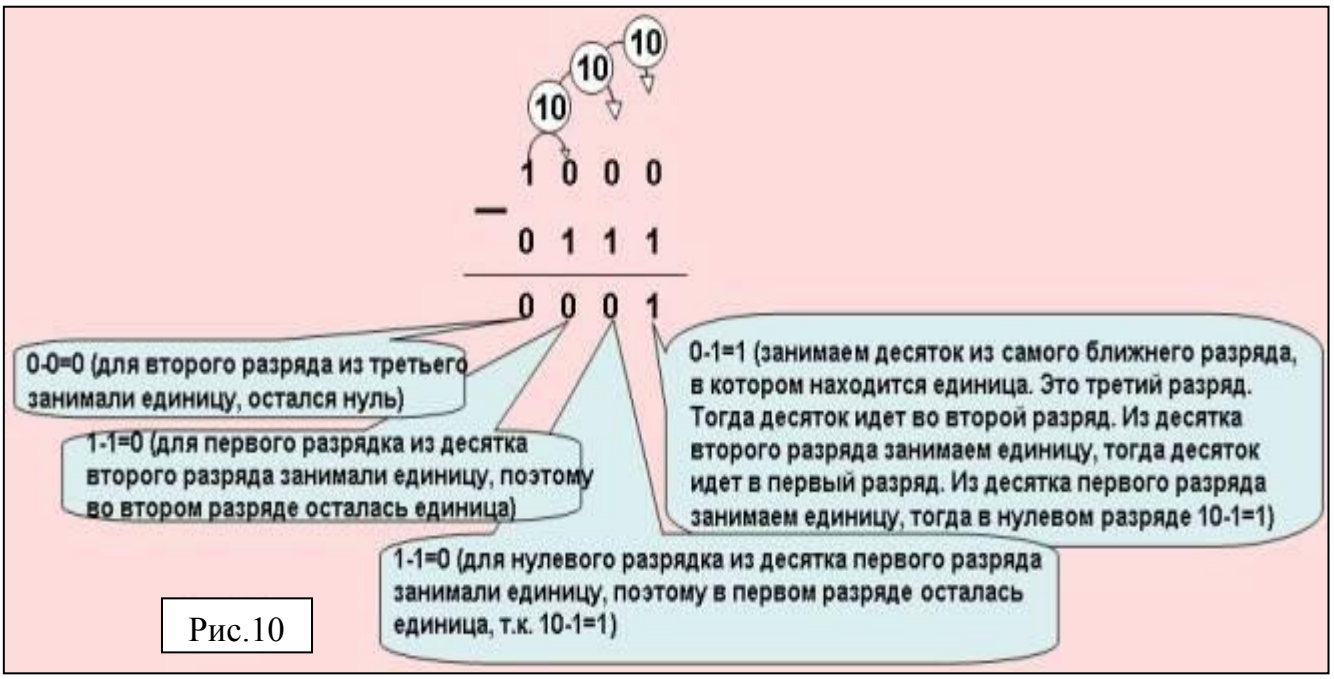

Рис.10

2. Вычитаем из большего числа меньшее число: 8 – 7 = 1.
3. Очевидно, что $1_{10} = 1_2$.

Рассмотрим еще *примеры*. Вычтем 1 из 10_8 и 10_{16}.
Восьмеричное вычитание: $10_8 - 1_8$. **Шестнадцатеричное** вычитание: $10_{16} - 1_{16}$.

```
  1     ← заем
  10
–  1
  7     (8 – 1 = 7)
```

```
  1     ← заем
  10
–  1
  F     (16 – 1 = 15 = F16)
```

Вычтем 1 из 100_8 и 100_{16}.
Восьмеричное вычитание: $10_8 - 1_8$. **Шестнадцатеричное** вычитание: $10_{16} - 1_{16}$.

```
  1     ← заем
  100
–   1
   77   (8 – 1 = 7)
   ↰ (7 – 0 = 0)
```

```
  1     ← заем
  100
–   1
   FF   (16 – 1 = 15 = F16)
   ↰ (15 – 0 = 15 = F16)
```

Выполните упражнение № 6. Выберите из таблицы «Ответы» соответствующие числа и запишите их буквенные обозначения в окна ввода ответов.

Выполните вычитание чисел:

а) 101_2 из 10110_2;	в) 13_8 из 40_8;	е) $1E_{16}$ из 31_{16};
б) $10{,}01_2$ из $101{,}1_2$;	г) 47_8 из 232_8;	д) $A6E_{16}$ из $1E40_{16}$;

5.3 Умножение

Умножение многозначных чисел в различных позиционных системах выполняется с помощью алгоритма перемножения чисел в столбик (как в десятичной системе), но при этом результаты перемножения и сложения однозначных чисел берутся из соответствующих рассматриваемой системе счисления таблиц умножения и сложения.

Таблицы умножения для двоичной и восьмеричной систем счисления:

Умножение в двоичной системе

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Умножение в восьмеричной системе

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Как видно из таблицы, умножение в двоичной системе сводится к сдвигам множимого и сложениям.

Рассмотрим пример умножения двоичных чисел, основанный на умении умножать "в столбик" и складывать двоичные числа.

Пример. Выполнить умножение двоичных чисел 101 и 111.

Решение.

1. Записываем "в столбик" данные числа друг под другом, разряд под разрядом, начиная с младшего нулевого разряда. Обычно большее число записывается над меньшим числом, т.е. 101 записывается под 111.

2. Цифра из младшего разряда нижнего числа 1 умножается на каждую цифру верхнего числа (1,1,1). Результат (111) записывается ниже в строку, каждая полученная цифра в соответствующий разряд. Далее берется следующая цифра нижнего числа – 0 и умножается на 111, результат записывается ниже со сдвигом на одну позицию влево. Затем последняя цифра «1» числа 101 умножается на 111. Результат (111)

записывается ниже также со сдвигом на одну позицию влево.

3. Складываем полученные три двоичных числа, не меняя их позиции, и получаем результат: $101 \cdot 111 = 100011$. Все решение изображено на рисунке 11.

Рис. 11

Проверка правильности вычислений

Для проверки нужно перевести множители в десятичную систему счисления, выполнить в ней умножение и перевести результат в двоичную систему.

$$111_2 = 7_{10},\ 101_2 = 5_{10},\ 7_{10} \times 5_{10} = 35_{10},\ 35_{10} = 100011_2.$$

Пример 1. Выполнить умножение восьмеричных чисел 4 и 7.

По таблице умножения восьмеричных чисел $4_8 \times 7_8 = 34_8$.

Пример 2. Выполнить умножение восьмеричных чисел 104_8 и 61_8.

$$\begin{array}{r} 104 \\ \times\ \ 61 \\ \hline 104 \\ +\ 630 \\ \hline 6404 \end{array}$$

5.4 Деление

Деление в любой позиционной системе счисления производится по тем же правилам, что и деление углом в десятичной системе. В двоичной системе деление выполняется особенно просто, ведь очередная цифра частного может быть только нулем или единицей.

Рассмотрим пример: найти частное двоичных чисел 100011 и 101.

Решение. 1. Записываем данные числа, как при делении десятичных чисел "в столбик" (рисунок 12). В числе 100011

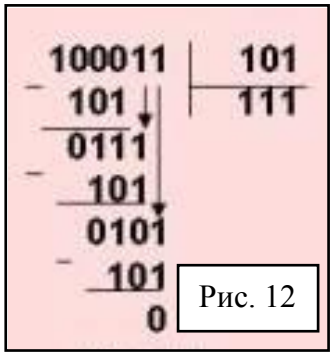

Рис. 12

выделяем первые цифры так, чтобы получить число большее, чем 101. Это число 1000. В частное записываем 1 ("берем по одному"). Умножаем единицу на 101 и записываем под число 1000, разряд под разрядом. Вычитаем из числа 1000 число 101 и получим 11. Число 11 меньше числа 101, поэтому сносим следующую цифру из числа 100011. Это цифра 1. Получили число 111. Опять "берем по одному", записываем под числом 111 число 101 и вычитаем из первого второе. Получим число 10. Сносим последнюю цифру 1. Получили число 101. Осталось "взять по одному" и в остатке получим «0», а в частном число 111.

Рассмотрим пример восьмеричного деления. Разделим 30_8 на 4_8 и 346_8 на 5_8.

```
 30 | 4        346 | 5
-30 | 6       -31  | 56
 0              -36
                 36
                  0
```

Результат: $30_8 : 4_8 = 6$, $346_8 : 5_8 = 56_8$. Выполним проверку, как обычно.

$30_8 = 24_{10}$, $4_8 =. 24_{10} : 4_{10} = 6_{10} = 6_8$.

$346_8 = 230_{10}$, $5_8 = 5_{10}$. $230_{10} : 5_{10} = 46_{10}$, $46_{10} = 56_8$.

Выполните упражнение № 7. Выберите из таблицы «Ответы» соответствующие числа и запишите их буквенные обозначения в окна ввода ответов.

1. Перемножьте числа, а затем проверьте результаты, выполнив соответствующие десятичные умножения:

а) 1011_2 и 101_2;	в) 35_8 и 4_8;
б) 101101_2 и $11{,}01_2$;	г) 23_8 и 6_8;

Примечания.

1. Все интерактивные версии упражнений разработаны в формате .html4 и импортированы в инструментальную оболочку УЧКОМ. Запускать программы упражнений необходимо из навигационной карты, нажимая на их номера, которые являются ссылками.
2. Изложенный в параграфе материал предназначен для углублённого изучения темы и рекомендуется для учащихся, которым предстоит сдавать Единый государственный экзамен по информатике. Можно использовать его также на занятиях по информатике со студентами гуманитарных специальностей. Ниже размещён сокращённый вариант параграфа, который можно использовать в обучении информатике на базовом уровне.
3. На CD-диске для учителя мы размещаем файл с ответами.

Системы счисления (сокращённый вариант теории)

1. Понятие системы счисления

Система счисления, или просто счисление, или нумерация,— набор конкретных знаков-цифр вместе с системой приемов записи, которая представляет числа этими цифрами.

По способу записи чисел цифрами системы счисления бывают *позиционные* и *непозиционные*. *Непозиционная система счисления* — это такая система счисления, что в записи числа каждая цифра имеет всегда одно и то же значение, т. е. ее «вес» *не зависит* от местоположения в числе. Непозиционной является римская система счисления. Например, число I в римской системе означает один, число II означает 1 + 1, т. е. два, а число III — 1 + 1 + 1 = 3. Эта система счисления имеет свое собственное оригинальное начертание цифр. В частности, в этой системе отсутствует нуль.

Римская система основана на употреблении семи особых знаков — *римских цифр*, которые делятся на четыре знака *десятичных разрядов* I = 1, X = 10, C = 100, M = 1000 и три знака *половин десятичных разрядов* V = 5, L = 50, D = 500. Все перечисленные знаки составляют *алфавит* римской системы счисления. В таблице 1 записаны единицы, десятки и сотни, записанные в римской системе.

Таблица 1. *Единицы, десятки и сотни, записанные римскими цифрами*.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	M

Десятичная система счисления — это позиционная система счисления, состоящая из 10 разных цифр и изучаемая в школе: **0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.** Здесь значение цифры *зависит* от ее положения в записи числа. Например, если цифра 1 стоит в числе на первом месте справа, то она значит *один*, если на 2-м месте справа, то *десять*, на 3-м месте справа — *сто*, и т. д. Так, в числе 512 пять сотен, один десяток и две единицы.

Двоичная система счисления — это позиционная система счисления, состоящая только из двух цифр: **0** и **1**. В компьютере вся информация представляется нулями и единицами, поэтому и числа обрабатываются в двоичной системе счисления.

2. Двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления

Число различных символов, составляющих алфавит системы счисления, называется *основанием* системы счисления.

Для десятичной системы счисления основанием является число **10**, для двоичной – число **2**, для восьмеричной – число **8**, для шестнадцатеричной – т число **16**.

В таблице 2 представлены числа от 0 до 20 в различных системах счисления. Поясним процесс формирования двоичных чисел.

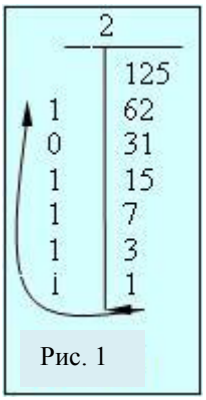

Рис. 1

Каждое последующее число таблицы получается прибавлением 1 к предыдущему числу. Если это число является наибольшим из символов алфавита (9 для десятичной системы, 1 для двоичной), то результатом соответствующего разряда суммы будет 0, а 1 переносится в старший разряд. Здесь подстрочные символы означают основание системы счисления.

Примеры:

89_{10}+l=90_{10}; 99_{10}+1 = 100_{10}; 10_2+1=11_2; 11_2+1 = 100_2; 111_2+1 = 1000_2.

Таблица 2

Десятичное	Двоичное	Восьмеричное	Шестнадцатеричное
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	18	10

В восьмеричной системе используются 8 символов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 0; наибольший символ – число 7. Следовательно, 7_8+ 1 = 10_8; 17_8+ I = 20_8; 77_8+ 1=100_8. Эта система используется в восьмиразрядных микропроцессорах.

Шестнадцатеричная система счисления по определению должна иметь 16 независимых символов алфавита. Десять из этих символов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0 (нуль) такие же, как и в десятичной системе. В алфавит добавляются еще 6 символов, обозначаемых латинскими буквами A, B, C, D, E, F. Символ A соответствует десятичному числу 10, B – числу 11, C – числу 12, D – числу 13, E – числу 14, F – числу 15. Примеры последовательных чисел в этой системе счисления: 9_{16} + 1 = A_{16}; F_{16} + 1 = 10_{16}; $AFFF_{16}$ + 1 = $B000_{16}$.

Шестнадцатеричная система имеет менее длинную форму записи больших чисел, чем десятичная и используется для адресации памяти компьютера. Здесь важно то, что число 16 есть целая степень двойки: 2^4= 16.

Любое число из одной системы счисления переводится однозначно в другую. Рассмотрим пример перевода десятичного числа 125 в двоичное число. Для этого нужно последовательно делить 125 на 2 до тех пор, пока частное не окажется меньше делителя (см. рис. 1). Результат – это последовательность остатков, записанная от последнего к первому, по стрелке, как указано на рис. 1. В данном случае

результат: $125_{10} = 1111101_2$.

Если десятичное число достаточно большое, то лучше перевести его сначала в восьмеричное, затем в двоичное, а потом в шестнадцатеричное. Переведем число 125 в восьмеричное число (рис. 2). Получим $125_{10} = 175_8$. Полученное восьмеричное число легко преобразовать в двоичное. Применяем для этого специальное ПРАВИЛО ТРИАД – каждую восьмеричную цифру заменяем трёхразрядным двоичным числом, пользуясь табл. 2. В данном случае **5** заменяем на **101**, **7 –** на **111**, **1 –** на **001**. Получим

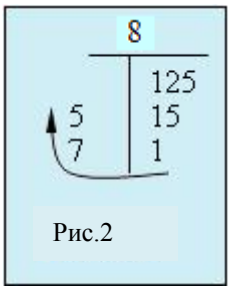

Рис.2

$$125_{10} = 175_8. = 001\ 111\ 101_2 = 1111101_2.\ .$$

Затем преобразуем это двоичное число в шестнадцатеричное, для чего условно разобьем его на части по 4 символа, начиная с крайней правой цифры. Затем каждой четверке сопоставим соответствующую шестнадцатеричную цифру. Такое преобразование правомерно, т.к. $16 = 2^4$.

$$1111101_2 = 7D_{16}.\ .$$

Если переводится дробная часть числа, то она умножается на основание системы счисления, после чего целая часть запоминается и отбрасывается. Вновь полученная дробная часть умножается на основание системы и т.д. Процедура продолжается до тех пор, пока дробная часть не станет равной нулю. Целые части выписываются после запятой в порядке их получения. Результатом может быть конечная, либо периодическая дробь. Поэтому, когда дробь является периодической, приходится обрывать умножение на каком-либо шаге. Например, переведем число $0{,}125_{10}$ в двоичную систему счисления (рис. 3). Получили, $0{,}125_{10}=0{,}001_2$.

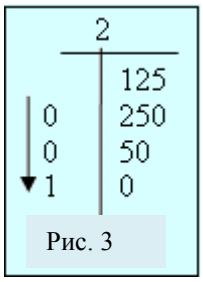

Рис. 3

Для обратного перевода чисел из двоичной, восьмеричной или шестнадцатеричной системы в десятичную следует преобразуемое число представить в форме, аналогичной следующему примеру:

$$995_{10} = 9\cdot10^2 + 9\cdot10^1 + 5\cdot10^0.$$

Это равенство очевидно. Аналогичные равенства верны и для чисел с другими основаниями. Например,

для числа с основанием **2**: $1111101_2 = 1\cdot2^6 + 1\cdot2^5 + 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0$
$=63+32+16+8+4+0+1= 125_{10}$;

для числа с основанием **8**: $175_8 = 1\cdot8^2 + 7\cdot8^1 + 5\cdot8° = 64 + 56 + 5=125_{10}$;

для числа с основанием **16**: $7D_{16} = 7\cdot16 + 13\cdot16^0 = 112 + 13 = 125_{10}$.

для дробной части: $0,\overset{-1}{0}\,\overset{-2}{0}\,\overset{-3}{1} = 0\cdot2^{-1}+0\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3}=\frac{1}{8}=0{,}125.$

3. Арифметические операции в двоичной системе счисления

Все арифметические операции над двоичными числами в ЭВМ можно свести к двум операциям: сложению и сдвигу. Это дает возможность выполнять все четыре арифметических действия и ряд логических операций на одних и тех же элементах.

Рассмотрим правила выполнения арифметических операций в двоичной системе счисления (табл. 3).

Таблица 3

Цифры		Сумма	Перенос	Разность	Заем	Произве-дение
A	**B**					
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

При ***двоичном сложении*** чисел **1+1** возникает разряд переноса, а разряд суммы равен **0**. При сложении многоразрядных двоичных чисел следует применять правило табл. 3 многократно, начиная с пары младших разрядов по направлению к старшей. После сложения пары младших цифр и получения значения младшего разряда суммы складывается следующая пара цифр с учетом переноса из младшего разряда. Затем этот процесс повторяется.

Пример.

Найти сумму и разность двоичных чисел 10100_2 и 101_2

$10100_2=20_{10}$, $101_2=5_{10}$

$11001_2=25_{10}$, $1111_2=15_{10}$

$$\begin{array}{r} +\ 10100 \\ 101 \\ \hline 11001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 10100 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

Получаем: $11001_2 = 25_{10}$, $1111_2= 15_{10}$.

При ***вычитании*** большей цифры из меньшей возникает необходимость заёма **1** из более старшего разряда. Если значение разряда равно **1**, то после заёма значение этого разряда станет равным **0**. Однако, если старший разряд **(n + 1)** уменьшаемого равен **0**, то происходит заем из следующего старшего разряда **(n + 2)**, а значение первого старшего разряда **(n + 1)** становится единичным. Вычитание продолжается.

Умножение двух двоичных многоразрядных цифр выполняется аналогично умножению десятичных чисел. Сначала вычисляются частные произведения множимого на каждый разряд множителя. Если умножение начинается со старшего разряда множителя, то каждое следующее частное произведение сдвигается на один разряд вправо по отношению к произведению, полученному ранее. Затем полученные частные произведения складываются по правилам двоичного сложения, причем суммирование частных произведений выполняется последовательно.

Деление в двоичной системе счисления выполняется так же, как и в десятичной системе, путем подбора очередной цифры частного, которая затем умножается на делитель. Полученное произведение вычитается из делимого для проверки правильности подобранной цифры. Затем процесс повторяется до тех пор, пока остаток не окажется меньше делителя.